

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ В БИОЛОГИИ И МАТЕМАТИКЕ

А.М.Молчанов

Научно-исследовательский вычислительный центр АН СССР

Тема моего краткого вступительного слова - современное состояние взаимодействия математики и биологии. Сейчас это состояние чрезвычайно поучительно, многозначительно, и, мне кажется, в дальнейшем перспективно и продуктивно. Я все прилагательные расставил, как краткие, так и длинные; теперь можно переходить к существу дела. Еще 20, ну, максимум 30 лет назад единственной (в широком масштабе) формой взаимодействия математики и биологии была статистическая обработка результатов наблюдений. Я даже помню кусочек расписания на межмате, маленькая клеточка, в которой было такое заклинание, которое я еще тогда выучил наизусть: "Теорвериобрабнабл". Расшифровывалось это так: "Теория вероятностей и обработка результатов наблюдений". От этого заклинания сегодня мы (как мне кажется) достаточно далеко ушли, а связано это с важным обстоятельством, которое я попробую наглядно изобразить.

В прошлом веке и большую часть этого века единственным представлением - я повторяю, в "широких массах" - о том, что должны делать математики в биологии было представление, что математики должны изучать стационарное состояние и малые отклонения от него. И это все, что доверялось тогда математикам. Под стационарным состоянием понималось в те времена следующее. Вот у вас есть некая ось X (биомасса, дыхание, или еще что-нибудь), а стационарное состояние - точка на этой оси, к которой при малых отклонениях приближается система в процессе своей жизнедеятельности. Это есть стабильное устойчивое состояние (рис. 1). Потом появились словечки типа "метастабильное", но они все не очень далеко уходили от этого главного понимания. Если изобразить во времени - пусть " x " - это

некий признак, который нас интересует, а " t " - время.

Сначала с ним (с " x "-ом) что-то такое происходит, а потом он выйдет на стационар (рис. 2, нижняя позиция). А если он находился сверху, то он все равно выйдет на тот же стационар (рис. 2, верхняя позиция). Вот

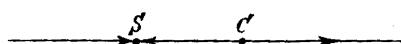


Рис. 1. Точка S - устойчивая стационарная точка. Весь интервал CS входит в область притяжения стационара S .

это и есть стационарное состояние; это вот и есть то, чем должна заниматься математика (рис. 3).

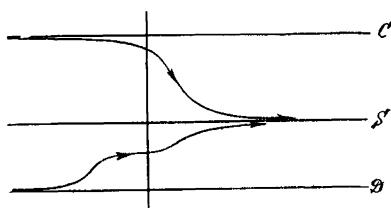


Рис.2. S-образная кривая - переходный процесс $C \rightarrow S$. Но в той же системе переходный процесс ($D \rightarrow S$) в тот же стационар S может быть значительно сложнее (с ускорениями и замедлениями).

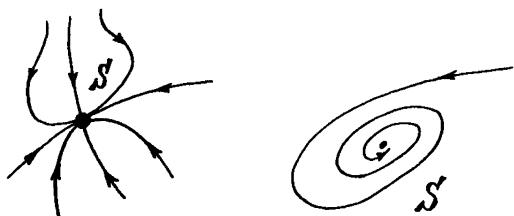


Рис.3. Типичные устойчивые стационарные точки - узел слева и фокус справа.

Лет 17 назад в Пущине был проведен первый колебательный симпозиум. К этому времени мы начали понимать, что стационарным состоянием может быть не только равновесие, но и предельный цикл, и траектория движения системы на него может снаружи и изнутри начищиваться (рис. 4). Типичный пример стационарных режимов такого типа - это система "хищник-жертва", знаменитая Вольтерровская система^{*}). Другие примеры - физиологические процессы, дыхание или сердцебиение. Обычно рисуют кардиограмму так: "x" (одно из "отведений") как функцию от "t", и получают весьма прихотливые кривые (рис. 5). Аналогичный график получится для любого другого "x" от "t"; самое главное, что процесс цикличен.

Это уже довольно серьезный сдвиг в понимании. Но еще остается, по-видимому, пройти самое главное. И у меня такое впечатление, более того, уверенность, которой я хотел бы заразить вас, что сейчас, спустя 17 лет, мы серьезно продвинулись в понимании того, что такое стационарное состояние. Старые математические представ-

^{*}) В Вольтерровской системе реализуется бесконечно много циклов. Но любое реалистическое уточнение идеализированной трофической схемы приводит обычно к выявлению единственного предельного цикла.

ления о стационарных состояниях (более точно: те, которые использовались в биологии) были настолько бедны по сравнению с богатейшим биологическим материалом, что все время казалось, что биология – это одно, а математика – это совсем другое. Кстати, так оно и есть; это все правда, но это не вся правда. А вот новая часть правды (как мне кажется) состоит в том, что мы сейчас осознали, что правильное понимание стационарных состояний при всей колossalной важности описанных выше двух типов к ним не сводится. Имеется значительно большее богатство стационарных состояний. К сожалению, эта тема очень трудна, и я смогу ее только обозначить.

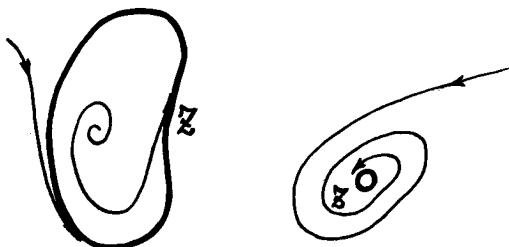


Рис.4. Периодический стационарный режим – устойчивый предельный цикл. При малой амплитуде (справа) экспериментально неотличим от фокуса.

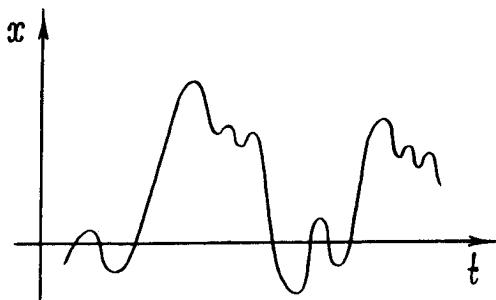


Рис.5. Запись только одного x во времени значительно проще экспериментально, но существенно беднее по содержанию. Осциллограф хорошо, а дисплей лучше...

В математике уже давным-давно известны очень своеобразные режимы, в которых могут находиться сложные системы, как эволюционирующие, так и (особенно) стационарные. Эти режимы были впервые обнаружены в небесной механике, в сложных теоретических вопросах движения планет, очень активно разрабатывались в теории турбулентности, а в последнее время наиболее популярны стали в связи с вопросами метеорологии, в связи с неустойчивостью режимов погодных,

процессов погодных. И наиболее знаменитая и популярная - слухи о ней, наверное, до всех дошли - это система Лоренца. Я не буду о ней рассказывать, не пугайтесь, но основную идеиную картину нарисую.

Мы привыкли вот к чему. Если у вас есть какая-то система, то ее движение в пространстве (геометрическом, фазовом или каком-либо ином) можно изобразить просто в виде линии (траектории). Обычная задача по теории устойчивости формулируется так: что будет, если мы немного отклонимся от начальной точки. Как будет вести себя новая траектория? Привычная точка зрения такова: в хорошей системе она далеко не уйдет от первой (рис. 6). Если система неустойчива, то будет сильно уходить (рис. 7). Вот наша стандартная картина, вот, что нам привычно. Вот то, что мы видим. Эта картина для плоскости (x, y) является почти неизбежной.

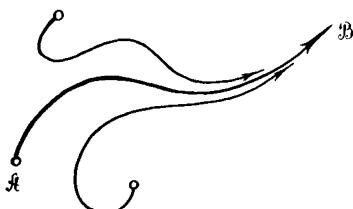


Рис. 6. Устойчивость траектории АВ в "хорошой" системе. В такой ситуации легко быть пророком.



Рис. 7. Экспоненциальная неустойчивость вблизи траектории АВ. Здесь безопаснее быть историком.

Но если число переменных, описывавших систему, больше двух - хотя бы три (а для биологии и сто отдать не жалко в качестве фазовых переменных даже для простейших систем), так вот там такие картинки переалистичны уже довольно часто, и вместо таких режимов мы приходим к более сложным. Я изображу типичную картину.

Возьмем маленький объем - каплю (считайте, что это просто струйки текущей жидкости). При увеличении скорости струя становится уже, при уменьшении - шире (рис. 8). Закон Бернулли, если помните. Этот объем течет, деформируясь, и немного меняя форму. На плоскости так оно и есть.

Нечто совсем иное происходит в трехмерном пространстве - не

всегда, конечно, но достаточно часто, чтобы с этим пришлось считаться. Оказывается, что картина будет совсем другой. Если мы капнем капельку окрашенной жидкости в трехмерную струю, то судьба этой окрашенной капельки будет такова: через некоторое время она превратится в нечто, похожее на листок клевера из трех^{*)} лепестков (рис. 9). Пройдет еще некоторое время и каждый из лепестков тоже "растроится", но общий объем капли сохранится прежним. Система чрезвычайно неустойчива, но локально. Все это происходит в фиксированном небольшом объеме. Капелька не может дробиться, она размазывается по всему небольшому объему.

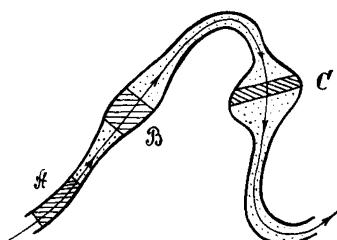


Рис.8. Трубка тока. Один и тот же "жидкий объем" А несколько замедляется в положении В и резко тормозится в положении С.

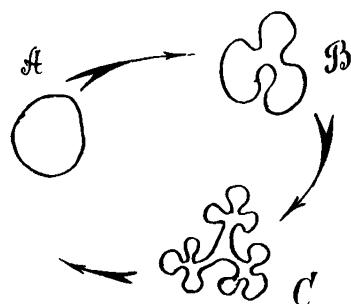


Рис.9. Растекание капельки в локально неустойчивых системах. Фазовый объем в положениях А, В и С один и тот же.

Поэтому, если вы сосчитаете на ЭВМ такую систему, то картина, которую вы увидите, будет следующая: могут появиться ограниченные объемы, которые заполнены довольно прихотливыми траекториями. Качественный рисунок довольно близок к реальности. Такого типа картинок сосчитано уже довольно много. И вот эту "непонятность" и надлежит рассматривать в качестве правильного аналога стационарного состояния.

^{*)} Или двух, или четырех, а то и больше.

Именно то безобразие^{х)}, которое здесь происходит, - это и есть стационарный режим, типичный для трехмерных систем. Никуда далеко траектория не уходит, все остается здесь и происходит перемешивание - вот правильное слово. Вы знаете, на плоскости невозможны пересечения фазовых траекторий. Но все происходит в трехмерном пространстве, это пространственная кривая. Она нигде не самопересекается, но в проекции на любую плоскость возникает подобная типичная картина со множеством самопересечений.

Итак, кратко повторяю еще раз: старое понимание стационарных режимов - устойчивое равновесие; современное, достаточно широко распространенное понимание - предельные циклы. Поэтому то, чем сейчас серьезно следует заниматься - это новые типы стационарных режимов.

Каковы стандартные подходы к подобным системам, в которых реализуются такого рода стационарные режимы, когда мы сталкиваемся с ними в реальном эксперименте? Конечно, статистика! Вычисляется вероятность нахождения системы в данной точке - ничего дурного в этом нет, это хорошее приближенное понимание. Но этого недостаточно. Что мы будем знать при таком подходе? Представьте себе, что основную часть времени система проводит на периферии, там она медленно движется, серединку проскаакивая быстро. Тогда, если вы нарисуете плотность вероятности, то у вас получится так: жирно здесь и плавно спадает к центру. Вот нормальная картина, которую вы в эксперименте получаете. Вероятностная оценка ситуации (рис. 10). Можно однако понимать это более точно. Можно все-таки сказать, что система не просто размазана по некоторому объему, а еще есть некоторые предпочтительные вероятности переходов из одной части в другие. Но еще лучше вообще не говорить о "вероятности" переходов, лучше назвать кошкой и просчитывать истинную траекторию движения.

Вот разница в трех подходах. Точнее, это последовательное развитие одного и того же подхода. Потому что если область, которую заполняет траектория, достаточно мала, то мы ее воспринимаем как стационарную точку. Если эта область достаточно велика, но вытянута (типичный пример - узкое кольцо, внутри которого происходит движение) - мы говорим - линия. Если оба радиуса велики, но близки по размерам, то это воспринимается как предельный цикл. А вот если они становятся заметно различными, то мы вынуждены гово-

^{х)} Безобразие - это отсутствие образа. Точнее, отличное от привычного и приятно-понятного (в силу привычки) образа.

рить: система с перемешиванием. Итак, в зависимости от конкретной геометрии системы мы воспринимаем стационарные режимы то как точки, то как линии, то, наконец, как объемы (рис. 11.).

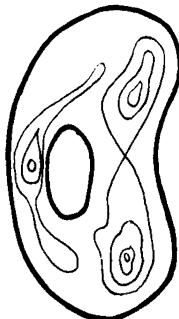


Рис.10. Плотность "вероятности" нахождения системы в разных точках. Правильнее говорить о "среднем времени пребывания" изображающей точки в данном месте. Нарисованы изокроны - линии равной длительности пребывания. Не смешивать с траекториями!

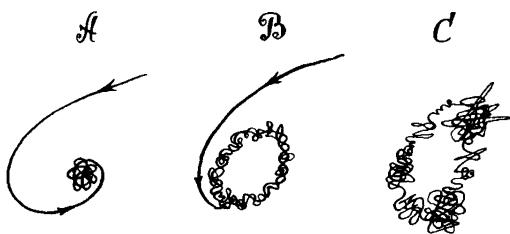


Рис.11. Во всех трех случаях есть зоны перемещивания. Однако экспериментатор скажет, что в случае А имеется стационар, а в случае В ему удалось обнаружить предельный цикл. В случае С он либо начнет чинить прибор, либо свалит все на солнечную активность.

Хочу подчеркнуть еще одно важное обстоятельство, тесно связанное со всем только что сказанным. Мы сейчас должны большое внимание - если, конечно, хотим понять эту новую ситуацию - уделять границам. Классический пример такой. Два соседствующих биогеоценоза друг с другом взаимодействуют, один обычно вытесняет другой. Границу между ними часто рисуют простой линией - это один, это другой. Но если вы почитаете хорошие учебники, хорошие книжки, то вы увидете, что правильную картину рисуют иначе (рис. 12.).



Рис.12. Слева граница между биогеоценозами в плохих книгах, справа - в хороших.

Упрощено, но в целом достаточно правильно: это - состояние А, это - В, а в зоне границы прихотливо перемешаны элементы А и В. Там непременно есть еще и другие элементы, и они играют важную роль, но мы для простоты будем считать, что граница есть перемешивание двух типов, переходная зона. Возникает интересный и серьезный вопрос: как устроен этот стационар А? Как устроен другой стационар В? Они оба чаще всего метастабильны, т.е. стационарны только в каких-то узких условиях. И, наконец, самое любопытное: как происходит переход от одного к другому? Возникает, следовательно, интересный самостоятельный, независимый вопрос о поведении границы.

Я ограничусь двумя замечаниями. Замечание первое: есть понятие ударной волны. Это ситуация, когда у вас есть два стационара точечного типа и переход из состояния А в состояние В происходит довольно резко (с крутым фронтом). Тогда мы говорим, что имеется движущая ударная волна из В по А (рис. 13). Понятие это возникло в гидродинамике, но оно достаточно хорошо применимо ко многим другим ситуациям. У этого понятия могут быть два аспекта. По оси абсцисс можно откладывать "x", а можно откладывать "t". В одном случае вы будете иметь геометрию, а в другом - кинетику. Если переходный процесс идет быстро, то пространственный фронт крутой. Обычно пространственная картина есть разверстка в пространстве*) временного процесса, а временная картина есть разверстка**) во времени пространственной ситуации. Это двойственные вещи: либо "x", либо "t". Важно то, что уже в простых задачах не всегда реализуется S-образная кривая. Довольно часто картина бывает сложнее.



Рис.13. Переходная зона (типа ударной волны). Сравните с рис.2, изображавшим переходный процесс (то есть во времени, а не в пространстве) и в более простом случае.

Вот если у вас есть два стационарных уровня, то картина бывает, как на рис. 13. Это достаточно широко известное явление. Но куда интереснее, когда эта система, этот переходный процесс устро-

*) Запись на магнитофон.

**) Проигрывание записи.

ен как на рис. 14. Не видно, что там было раньше, не видно, что будет потом, но очень видно, что происходит сейчас. А происходит нечто непонятное.



Рис.14. Причиной такой "свистопляски" конечно могут быть "наводки" от линии метро, слишком близко расположенной к физфаку МГУ. Ну, а если система в самом деле такая?

Извинительно поэтому, что человек, которому показывают такую картину, говорит: "Конечно, случайность". Но мне кажется, что в ситуациях, подобных этой, слишком уж комфортно и просто сказать: стохастика, вероятность, случайность. Фактически это отказ от анализа. Я расскажу свой любимый анекдот об умной девочке. Девочка была маленькая и умела считать до двух, а ей дали три ложки и попросили сосчитать. Девочка решительно отодвинула одну ложку и сказала: "Уберите эту ложку, она грязная".

Так вот мы сейчас умеем прекрасно считать до одного, просто великолепно, S-образные кривые, стационарные состояния, термодинамическое равновесие. Чуть хуже, но вполне прилично, умеем считать до двух (предельные циклы). А что касается трех, то мы решительно говорим: стохастика, случайность.

Я абсолютно убежден, что многие важные идеи и факты классической биологии могут быть поняты только вместе с математиками. Верно и обратное - серьезные части математики получат свое новое дыхание при обращении к биологическим задачам. Ищите контакты.